

计算圆环天线的麦克斯韦电路理论

沈文辉¹, 薛昌 ■¹, 梅冠香², 林嘉宏¹

(1. 特种光纤与光接入网省部共建重点实验室, 上海大学通信与信息工程学院, 上海 200072;
2. 香港城市大学电子工程学系, 香港 999077)

摘要: 本文以麦克斯韦电路理论为基础对圆环天线加以分析, 得到圆环天线的表面电流分布. 经比对发现本文计算结果与矩量法计算结果一致, 证明了本文方法的有效性和正确性. 通过对圆环天线二阶 MC 方程的深入研究, 得到了圆环天线表面电流的解析表达式, 该式适于计算任意大小圆环天线的表面电流分布. 本文成果对求解复杂电磁结构问题具有一定参考意义.

关键词: 麦克斯韦电路理论; 圆环天线; 矩量法

中图分类号: TN015 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2011) 09-1982-04

Analyzing the Circular Loop Antenna by the Theory of Maxwellian Circuits

SHEN Wen-hui¹, XUE Chang-wei¹, Kenneth K. Mei², LIN Jia-hong¹

(1. Key Laboratory of Specialty Fiber Optics and Optical Access Networks, School of Communication and Information Engineering, Shanghai University, Shanghai 200072, China; 2. Department of Electronic Engineering, City University of Hongkong, Hongkong 999077, China)

Abstract: The paper analyzes the circular loop antenna based on the theory of Maxwellian circuits, and the current distributions of the antenna are obtained. Results are verified by moment methods, the good agreements prove the efficiency and correctness of the analysis in the paper. Through closer investigation on the second order MC equation, we deduce the current's analytical formula of the circular loop antenna. The formula suits to compute the circular loop antenna of any size. The results of the paper have certain reference significance to more complicated electromagnetic structures.

Key words: the theory of Maxwellian circuits (MC); circular loop antenna; method of moments (MoM)

1 引言

圆环天线是一种常见天线组件, 它既可单独也可若干个组合在一起构成天线. 在国民经济生活各个层面得到广泛应用. 因此, 关于圆环天线的研究早在上世纪 50 年代就非常活跃. 文献[1, 2]对圆环天线做了非常详尽的回顾. 通常分析圆环天线的经典方法需要较多的数学技巧, 求解过程复杂并且有较大局限性. 如文献[3, 4]假设的电流分布局限于周长是整数倍波长的圆环天线; 文献[5]假设表面电流是一种双曲分布, 但是这一假设只有在天线周长小于等于 0.5 个波长才有效. 国内在这方面的研究工作也很活跃, 文献[6, 7]分析了圆环天线的辐射场特性, 文献[8]分析了双环天线的阻抗特性等.

综观这些研究工作, 解析法通过假设圆环天线上的表面电流分布来获得天线辐射场, 但是这些假设电流基本只在一定天线尺寸内有效, 如文献[3~5]. 而且解析

法分析圆环天线的推导和计算过程非常复杂, 不容易理解和掌握. 虽然 MoM^[9], FDTD^[10], 测度不变方程法^[11]等的引入克服了大尺寸圆环天线不能求解的问题, 然而而这些数值方法的计算结果并不能得到很好的提炼, 使其上升为解析公式. 与之不同的是, 麦克斯韦电路理论(MC)在研究圆环天线中有很大优势, 圆环天线的 MC 方程形式简单, 计算方便, 而且可以得到一通用圆环结构表面电流的解析式. 这一公式进一步简化了计算, 对提高圆环天线的分析速度和缩短研究周期具有很大价值.

本文研究了基于 MC 理论的圆环天线的表面电流分布, 提炼出适合于任何大小的圆环天线表面电流的解析公式.

2 圆环天线的麦克斯韦电路理论

如图 1 所示, 位于自由空间的一理想导体圆环天线, 其半径为 ρ , 导线半径为 a . 则其表面电流满足海

方程的一般形式^[12]:

$$\int_L \mathbf{J}(s') \pi(s, s') ds' = D \sin k |s| + \int_L \mathbf{J}(s') G(0, s') \mathbf{0} \cdot s' \cos ks ds' - \frac{jV}{\eta} \sin k |s| \quad (1)$$

式中,

$$\pi(s, s') =$$

$$G(s, s') s \cdot s' - \int_0^s \left[\frac{\partial G(\xi, s') \xi \cdot s'}{\partial \xi} + \frac{\partial G(\xi, s')}{\partial \xi} \right]$$

$\cdot \cos k(s - \xi) d\xi$, $G(s, s')$ 表示自由空间格林函数, s, s' 分别表示场点和源点位置, k 是波数, D 是待定系数, η 是自由空间的波阻抗, V 是馈电电压. 显然这个方程的求解较为复杂, 即使 MoM 求解, 也需要一定的数学经验和计算量.

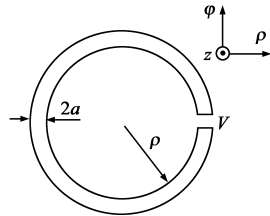


图1 圆环天线结构示意图

存在性定理^[13] 对于满足线性条件的积分方程, 必然存在一个微分方程, 与之同解. 与海伦方程同解的一阶 MC 微分方程组是^[13,14]:

$$\begin{cases} \frac{dI}{dl} = -j\omega CV + \beta I \\ \frac{dV}{dl} = -j\omega LI + \alpha V + E^{inc} \end{cases} \quad (2)$$

式中, ω 是角频率, E^{inc} 是照射在天线表面的入射场的切向分量, L 是分布电感, C 是分布电容, α 和 β 是相干源系数. 可以看出, 式(2)和传输线方程有些相似. 传输线方程的解与电路的摆放位置无关, 然而麦克斯韦方程组的解与电路的摆放位置却是相关的, 二者之间的误差在高频条件下是不容忽略的. MC 方程通过在传输线方程中加入相干源项 αV 和 βI , 它们的作用就是用来代替电路之间的耦合作用. 因此可以认为 MC 方程是完备的传输线方程, 它不但可以准确计算电路问题也可以准确计算场问题.

将式(2)第一个方程对 l 求偏导, 并将第二个方程代入, 整理可得 MC 二阶微分方程:

$$\frac{d^2 I}{dl^2} + U \frac{dI}{dl} + TI = -j\omega CE^{inc} \quad (3)$$

式中 $U = -\left(\frac{1}{C} \frac{dC}{dl} + \alpha + \beta\right)$, $T = \omega^2 LC + \frac{\beta}{C} \frac{dC}{dl} + \alpha\beta - \frac{d\beta}{dl}$. 麦克斯韦电路参数 U, T, C 只与系统本身有关, 而与边界条件无关. 即无论天线所处的电磁环境如何, 无论天线的输入电压大小, 只要天线系统结构不改变, 则 U, T, C 不变. 这是由唯一性定理^[14]加以保证的. 需要说明的是, 此处天线系统指的是处于自由空间中的天线, 以及其它金属物体组成的系统整体.

与海伦方程相比, MC 方程结构简单, 物理意义一目了然: 天线上的电流分布与外加电场/辐射场密切相关.

3 数值实验

3.1 麦克斯韦电路参数的提取

由式(3)可知, MC 方程中的三个麦克斯韦电路参数 U, T, C 还是未知量, 必须首先求出. 根据唯一性定理, 无论激励电场如何变化, U, T, C 都将保持不变, 因此只需三对对应的激励和电流分布, 然后将这一一对应的激励和电流代入 MC 方程即可提取出 MC 电路参数. 其基本思路为: 不妨假设天线上的三个电流分布, 通过海伦方程求出与其相对应的激励, 从而获得所需的三对电流分布和激励. 这一解法被称为电流假设法 (Matron 法)^[15].

所计算的两种不同大小的圆环天线 U, T, C 曲线分别如图 2、图 3 所示. 从图中可以看出, U, T, C 是复数, 并且除了在馈电处出现跳跃以外, 其它地方它们都是常数, 特别的 $U = 0$. 当圆环半径较大时这一特征更为明显, 比如在图 3 中, 不但 U, T, C 曲线的实部, 而且它们的虚部在馈电点处也出现明显的跳跃现象. 这一现象在大量的数值试验中重复出现, 因此可以归纳为: 在圆环天线条件下, 一般 MC 参数呈复数, 其实部与存储能量在环内的能量相关, 其虚部与辐射相关; 在结构光滑的地方呈现为常数, 且 $U = 0$, 而在断点处将会出现跃变. MC 电路参数的这一特性可以和天线结构互为因果, 即 MC 电路参数跃变处可以推定该处天线结构不连续, 反之亦然.

3.2 表面电流求解

求得 MC 电路参数以后, 式(3)即转化为一个可以求解的方程. 其步骤为: 把圆环天线 N 等分, 对每一小段列写 MC 方程, 并用数值差分代替微分计算, 结合关系式 $V = E^{inc} \Delta l$. 整理可得:

$$(2 + U_n \Delta l) i_{n+1} + 2(T_n \Delta l^2 - 2) i_n + (2 - U_n \Delta l) i_{n-1} = -j2\omega C_n V \Delta l, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

式中 Δl 是每小段天线的弧长, $U = \{U_n\}$, $T = \{T_n\}$, $C = \{C_n\}$, $n = 1, 2, \dots, N$. 式(4)可以很方便地写成矩阵形式, 电流 $I = \{i_n\}$, $n = 1, 2, \dots, N$ 可通过解矩阵方程求得. 图 4、图 5 分别是周长 $k\rho = 0.01$ 和 $k\rho = 0.5$ 的圆环天线的电流分布曲线. 从图中可见, MC 计算结果与矩量法计算结果吻合良好. 图 4 结果表明小圆环天线上电流分布基本是均匀的, 无论振幅还是相位都是一个常数.

3.3 圆环天线的输入电导

当求出圆环天线的电流分布以后, 也可以很方便地得到输入电导图. 计算结果如图 6 所示. 可以发现, 图 6 的计算结果与参考文献^[16]108 页图 5.5 十分相似. 这从另一个侧面证明本文结果的正确性和准确性.

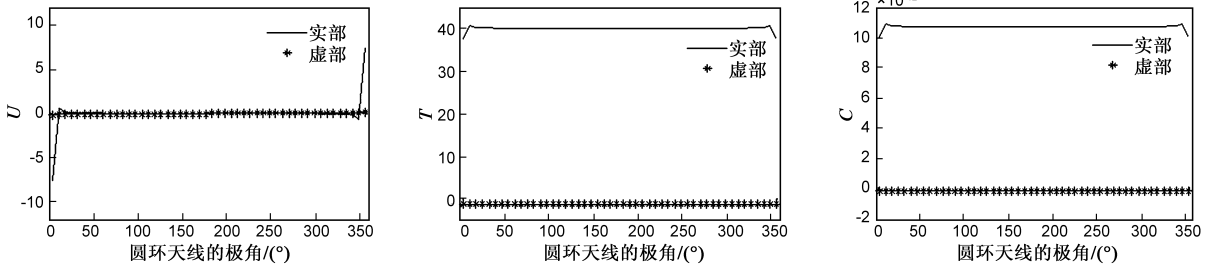


图2 圆环天线的 U 、 T 、 C 曲线图, $k\rho=0.5$

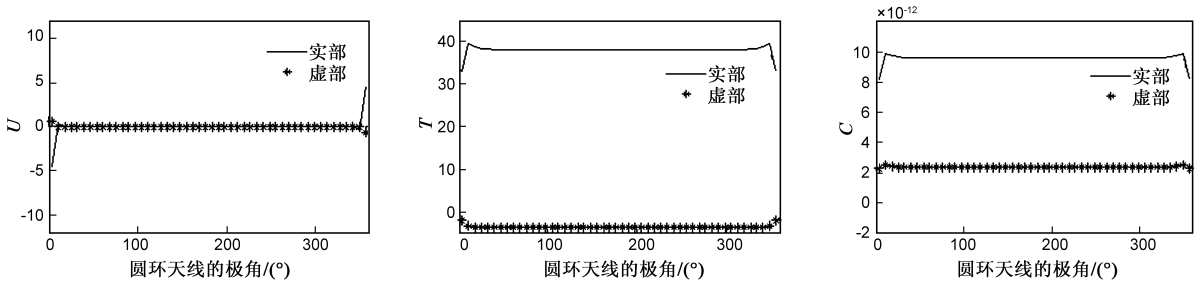


图3 圆环天线的 U 、 T 、 C 曲线图, $k\rho=3$

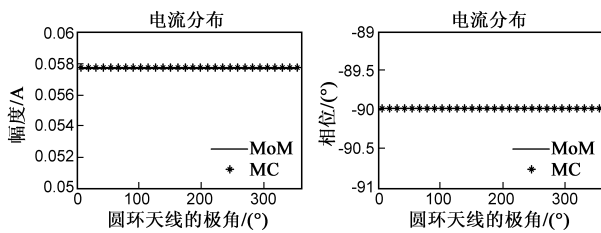


图4 圆环天线电流分布, $k\rho=0.01$, MC与MoM计算结果对比

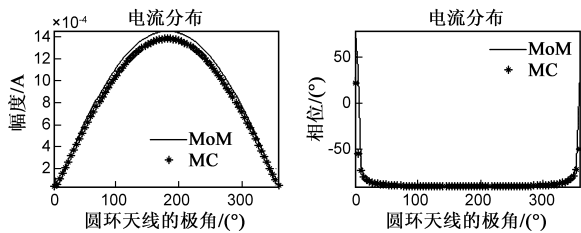


图5 圆环天线电流分布, $k\rho=0.5$, MC与MoM计算结果对比

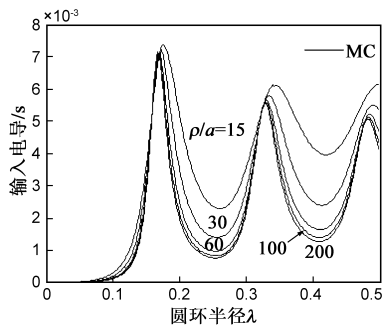


图6 圆环天线的输入电导图, MC与参考文献[16]108页图5.5对比

4 圆环天线表面电流解析公式

图2和图3显示,圆环天线的参数 U 在圆环天线导线上除端点以外处处 $U = 0$. 这一特性有助于我们获

得圆环天线表面电流的解析式,具体步骤如下:齐次方

程 $\frac{d^2 I}{dl^2} + TI = 0$ 的通解是

$$I = A \sin \sqrt{T} \rho \phi + B \cos \sqrt{T} \rho \phi \quad (5)$$

其中, A 和 B 是待定参数. 利用圆环天线在馈电点处电流的连续性,以及此处电压的边界条件 ($V(0) = 0.5, V(2\pi) = -0.5$),可确定待定系数. 整理得表面电流的解析式:

$$I = -\frac{j\omega C}{2\sqrt{T}} \left(\sin \sqrt{T} \rho \phi + \frac{1 + \cos 2\pi \rho \sqrt{T}}{\sin 2\pi \rho \sqrt{T}} \cos \sqrt{T} \rho \phi \right) \quad (6)$$

检查所得式(6),有 $I(0) = I(2\pi)$,满足端点处电流相等的条件. 再用数值方法验证之,图7给出了运用该公式求解一半径为 $k\rho = 5.3$ 的圆环天线的电流分布. 从图中可见,解析方法和数值方法(MoM)计算结果完全吻合,显示式(6)良好的适应性,以及准确性. 同时,图7中的相位曲线充分显示出圆环天线上的相位波形具有明显的对称性这一特点. 值得指出的是,这一电流公式没有任何局限性,对任意大小的圆环天线都适用,具有普遍性.

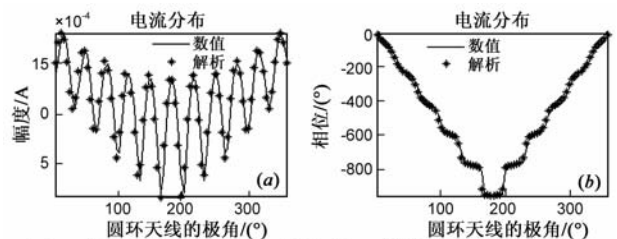


图7 数值方法(MoM)和解析式(式(5))计算电流结果对比图, $k\rho=5.3$

5 结论

基于 MC 理论,本文对圆环天线做了理论分析和数值计算,揭示了 MC 参数的理论内涵,得到了圆环天线表面电流的数值解.所得结果与矩量法计算结果完全吻合,显示出本文理论分析的正确性和数值计算的准确性.并且,通过对 MC 二阶方程的深度研究,得到圆环天线表面电流的解析表达式.该解析解没有任何限制,对任意大小的圆环天线都适合.MC 参数具有明显的物理含义,计算结果容易提炼上升到解析公式,这是该方法有别于其它数值计算方法的一大特色.

参考文献

- [1] R W P King, G S Smith. Antennas in Matter: Fundamentals, Theory and Applications [M]. Cambridge, MA: MIT Press, 1981. 527 – 605.
- [2] C A Balanis. Antenna Theory, Analysis, and Design [M]. New York: John Wiley & Sons Inc, 2005. 164 – 203.
- [3] D Foster. Loop Antennas with Uniform Current [A]. Alfred Norton Goldsmith. Proceedings of the IRE [C]. New York: Institute of Radio Engineers, 1944. 603 – 607.
- [4] J B Sherman. Circular Loop Antennas at Ultra-high Frequencies [A]. Alfred Norton Goldsmith. Proceedings of the IRE [C]. New York: Institute of Radio Engineers, 1944. 534 – 537.
- [5] G Gliński. Note on the circular loop antennas with nonuniform Current distribution [J]. J Appl Phys, 1947, 18(7): 638 – 644.
- [6] 李太全, 田茂, 吴庆麟, 徐继生. 圆环天线的时域有限差分分析 [J]. 电波科学学报, 2002, 17(6): 577 – 580.
LI Tai-quan, TIAN Mao, WU Qing-lin, XIU Ji-sheng. Analysis of a round strip antenna using the finite-difference time-domain method [J]. Chinese Journal of Radio Science, 2002, 17(6): 577 – 580. (in Chinese)
- [7] 杜惠平. 圆环天线的辐射问题 [J]. 重庆邮电学院学报, 1998, 10(4): 15 – 17.
DU Fei-ping. On the radiation of loop antenna [J]. Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications, 1998, 10(4): 15 – 17. (in Chinese)
- [8] 章文勋, 袁锦云, 杨先华. 双环天线的阻抗理论和频带优化 [J]. 东南大学学报(自然科学版), 1987, 17(4): 15 – 20.
- [9] 任仪, 聂在平, 赵延文, 马文敏. 矩量法中阻抗矩阵的稀疏化研究 [J]. 电子学报, 2007, 35(12): 2354 – 2358.
REN Yi, NIE Zai-ping, ZHAO Yan-wen, MA Wen-min. Scarcification of the impedance matrix in MoM [J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(12): 2354 – 2358. (in Chinese)
- [10] 张琰, 高本庆. FDTD 计算中非均匀网格网络的分析及综合 [J]. 电子学报, 2001, 29(7): 965 – 969.
ZHANG Yan, GAO Ben-qing. The analysis and synthesis of non-uniform mesh network in FDTD computation [J]. Acta

Electronica Sinica, 2001, 29(7): 965 – 969. (in Chinese)

- [11] 洪伟, 朱震海. 一种提取多层介质多导体互连电磁参数的快速算法: 有限差分-不变性测试方程法 [J]. 电子学报, 1997, 25(9): 31 – 42.
HONG Wei, ZHU Zhen-hai. A fast algorithm for the parameter extraction of multilayered multiconductor interconnections: finite difference-measured equation of invariance method [J]. Acta Electronica Sinica, 1997, 25(9): 31 – 42. (in Chinese)
- [12] K K Mei. On the integral equations of thin wire antennas [J]. IEEE Trans. Antennas and Propagation, 1965, 13(3): 374 – 378.
- [13] K K Mei. Theory of Maxwellian circuits [J]. RadioSci. Bull, 2003, 305(9): 6 – 13.
- [14] Li Li, Yao-Wu Liu, K K Mei, Kwok-Wa Leung. Applications of the Maxwellian circuits to linear wire antennas and scatterers [J]. IEEE Trans. Antennas and Propagation, 2006, 54(10): 2725 – 2730.
- [15] Wenhui Shen, Mingliang Wu, K K Mei. Application of MEI to Maxwellian circuits [A]. Antennas and Propagation Society International Symposium [C]. USA, 2009. 1 – 4.
- [16] R F 哈林顿. 计算电磁场的矩量法 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1981. 104 – 109.

作者简介



沈文辉 男, 1972 年 12 月出生于安徽芜湖, 博士. 2005 年毕业于上海交通大学电子工程系. 现任职于上海大学通信与信息工程学院, 硕士生导师. 主要研究方向为麦克斯韦电路, 矩量法, 遗传算法, 微带天线 CAD 等.
E-mail: haomeni@163.com



薛昌 男, 1985 年 12 月出生于上海市, 研究生, 现就读于上海大学通信与信息工程学院, 主要研究方向为麦克斯韦电路理论.
E-mail: xuechangwei01129@sina.com

梅冠香 男, 1932 年出生于上海市, 博士. 1956 年毕业于美国威斯康星大学. 美国加州大学柏克利分校教授、香港城市大学讲座教授. 梅冠香教授为 IEEE Life Fellow, 其主要学术贡献集中在电磁学的数值计算领域. 其中最受人推崇的为 MEI 方法、单矩法和麦克斯韦电路理论. E-mail: eekmei@cityu.edu.hk

林嘉宏 男, 1988 年 1 月出生于上海市, 研究生, 现就读于上海大学通信与信息工程学院, 主要研究方向为麦克斯韦电路理论.
E-mail: reallylin@hotmail.com